Γραμμική Άλγεβρα II

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1 Φεβρ. 2016, Ισοδυναμία πινάκων

1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν βάσεις e, g ώστε ο πίνακας $[T]_e^g$ της T να είναι ίσος με $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

3x4. θέλω με 4x1 ... 3x1.

det AB≠0
detA≠0 ∧ detB≠0
άρα A αντιστρ
και B —''—

3. Υποθέτουμε ότι A, B είναι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες και ότι το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμο. Δείξτε ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι.

4. Δείξτε ότι αν A, B είναι όμοιοι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε και οι πίνακες A^k και B^k είναι όμοιοι για κάθε $k \geq 1$.

5. Το ίχνος $tr(A)$ ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $tr : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ είναι γραμμική.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $tr(AB) = tr(BA)$ για καθε $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

γ) Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος. Επομένως, αν V είναι ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\phi : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζεται το ίχνος της ϕ ως $tr(\phi) = tr([\phi]_e^e) \in \mathbb{F}$, όπου e είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V. Δείξτε ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της βάσης e.

6. Έστω $n \geq 1$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ με $T(f(x)) = f(x)'$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

7. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο την σχέση $\phi((x,y,z)) = (y+z, x+z, x+y)$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της ϕ.

8. Υποθέτουμε A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{F}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $T(b) = Ab$ για κάθε $b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

9. Θεωρούμε τον υπόχωρο $V = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + 3c = 0\}$ του $\mathbb{R}^3$ και την απεικόνιση $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ που είναι ο περιορισμός στο V της απεικόνισης $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $\psi((x,y,z)) = (x, 4y+6z)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι γραμμικές και βρείτε τις βαθμίδες τους.

Μάθημα 4ο

Γραμμική Άλγεβρα II. 25/02/2016

Έχω έναν τυχαίο πίνακα $A \in K^{m \times n}$. Μπορώ να αντιστοιχίσω μια απεικόνιση σε αυτόν τον πίνακα;

$$L_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}, \quad b \to \underset{m\times n}{A} b \to n\times 1$$

Ποιός είναι ο πίνακας της απεικόνισης από την κανονική βάση α στην κανονική βάση β;

$[L_A]_\alpha^\beta$, όπου α η κανονική βάση $K^{n\times 1}$

β η κανονική βάση $K^{m\times 1}$.

$$[L_A]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ γιατί:}$$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Για το $\vec{a}_1$ έχουμε: $L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ουσιαστικά είναι η πρώτη μου στήλη.

Για το $\vec{a}_2$ (δεύτερη στήλη): $L_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ ουσιαστικά είναι η δεύτερη μου στήλη.

!!! Υπενθύμιση:

(1) Ισοδύναμοι πίνακες $A, B \in K^{m \times n}$, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q, τω $A = PBQ$.

(2) Ομοιότητα (ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ) $A, B \in K^{n \times n}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = P^{-1}BP$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1. (Ισοδυναμία πινάκων)

(1) $T: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$[T]_e^g = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρέπει να βρώ τον πυρήνα.

$$\ker T = \left\{ a+bx+cx^2 \,/\, T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ a+bx+cx^2 \,/\, \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Προκύπτουν 4 εξισώσεις με 3 αγνώστους:

(2) $\begin{cases} b+c=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ Υπάρχει ένα πολυώνυμο $\longrightarrow$ το μηδενικό άρα ο πυρήνας έχει διάσταση 0 (και η απεικόνιση είναι 1-1).

$\dim \ker T = 0$.

Έχουμε:

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim\ker T + \dim \operatorname{Im} T.$$

$$\underset{3}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{3}{\downarrow}$$

Επομένως $e=\{1,x,x^2\}$ γιατί είναι κανονική βάση του χώρου των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2. $(\mathbb{R}_2[x])$

Προκύπτει ότι: $[T]_e^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ που είναι διάστασης 4×3.

Η g είναι πίνακες : $g=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

Την πρώτη στήλη του πίνακα $[T]_e^g$ μου την δίνει το πρώτο στοιχείο της βάσης e, άρα το $T(1)$ που είναι:

$T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ σημαίνει πως το a είναι 1 και όλα τα άλλα 0 στο $\longrightarrow \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}$

$T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1A_1 + 0A_2 + 0A_3 + 0A_4$, άρα $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Το δεύτερο στοιχείο της e μου δίνει τη 2η στήλη:

$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0A_1 + 1A_2 + 0A_3 + 0A_4$, άρα $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Στη συνέχεια $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0A_1 + 0A_2 + 1A_3 + 0A_4$, άρα $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Δηλαδή : $g = \{T(1), T(x), T(x^2), A_4\}$. Όποιο και να είναι το A_4 δεν μας νοιάζει γιατί έχει παντού συντελεστή 0.

$\longrightarrow$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε έναν τέτοιο πίνακα ώστε να είναι βάση

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τον φέρνω σε κλιμακωτή μορφή

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Βρήκα 3 αρχικές μονάδες. Θέλω άλλη μία ώστε να έχω 4 αρχικές μονάδες για να παράγουν τον χώρο, αφού θα έχει βαθμίδα 4. ($\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$)

Επομένως προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και επομένως $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 7r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Γυρνάω ξανά στις εξισώσεις.

$$\left.\begin{array}{c} x - y + w = 0 \\ 4y - z - w = 0 \\ 3w = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x - \frac{t}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{t}{4} \\ 4y = t \Rightarrow y = \frac{t}{4} \\ z = t \\ w = 0 \end{array}$$

Άρα $\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} t/4 \\ t/4 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

αυτό το διάνυσμα παράγει τον χώρο, είναι μη-μηδενικό ⇒ γρ. ανεξάρτητο
Άρα είναι βάση και $\dim \ker T = 1$.

$\dim \mathbb{R}^{4\times1} = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T.$

$4 = 1 + r \Rightarrow r = 3.$

Δηλαδή $(L_A)^{\delta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ και

$\delta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ όπου $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ κτλ..

(2) Να βρεθούν οι πίνακες P και Q ώστε:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ όταν } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_A : \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1} \qquad L_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$[L_A]_\gamma^\delta = [I]_\beta^\delta [L_A]_\alpha^\beta [I]_\gamma^\alpha, \text{ όπου } [L_A]_\gamma^\delta = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ σύμφωνα με άσκηση 1.

α κανονική βάση $\mathbb{R}^{4\times1}$, $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

β κανονική βάση $\mathbb{R}^{3\times1}$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+w \\ 3x+y-z+2w \\ 7x+y-2z+8w \end{pmatrix}$$

με $[L_A]_\gamma^\delta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| L_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x-y+w \\ 3x+y-z+2w \\ 7x+y-2z+8w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ψάχνω τους πίνακες αλλαγής βάσης:

$$P = [I]_\beta^\delta \quad \text{και} \quad Q = [I]_\gamma^\alpha.$$

για να λύσω το σύστημα, πηγαίνω στον επαυξημένο πίνακα.

Επομένως, $Q = [I]_\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = [I]_b^\delta = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -2/3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \to 3\times3$

η δ δεν είναι κανονική βάση !!

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = -k+\mu \\ 0 = k-\lambda+2\mu \\ 0 = k-2\lambda+8\mu \end{cases}$

Όπου το σύστημα που προκύπτει είναι Cramer γιατί:

$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 8-2+1-4 = 3 \neq 0$ (είναι Cramer).

$k = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{-4}{3}$

Για τις υπόλοιπες στήλες ακολουθώ την ίδια διαδικασία με $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = \dfrac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{-6}{3} = -2.$

$\mu = \dfrac{\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{-1}{3}$

Συνεχίζω την άσκηση με τον ίδιο τρόπο.

③ Προφορικά : $\det AB \neq 0 \Longrightarrow \det A \neq 0$ και $\det B \neq 0$ άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και B αντιστρέψιμος.

④ A, B όμοιοι $\xRightarrow{\text{ορισμός}}$ ∃ αντιστρέψιμος πίνακας P : $A = P^{-1} B P$.

A^k, B^k, για νδο είναι όμοιοι : $A^k = Q^{-1} B^k Q$. (νδο ∃Q)

$A = P^{-1} B P \Longrightarrow A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots \cdot A}_{\kappa \text{ φορές}} = \underbrace{(P^{-1} \cdot B \cdot P)(P^{-1} \cdot B \cdot P)(P^{-1} \cdot B \cdot P) \ldots (P^{-1} \cdot B \cdot P)}_{\kappa \text{ φορές}}$

$= P^{-1} \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B \ldots B P = P^{-1} \cdot B^k \cdot P$.

Άρα $A^k = P^{-1} \cdot B^k \cdot P \Longrightarrow$ πράγματι όμοιοι

⑤ $$tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$$

Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίας.

(i) Ίχνος είναι γραμμική απεικόνιση $tr: K^{n\times n} \to K$

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= tr\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\dots+(a_{nn}+b_{nn}) =$$

$$= (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\dots+b_{nn}) = tr(A)+tr(B)$$

σέβεται το άθροισμα.

$$tr(\lambda A) = tr\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11}+\lambda a_{22}+\dots+\lambda a_{nn} =$$

$$= \lambda(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) = \lambda\, tr(A)$$ σέβεται το βαθμωτό γινόμενο

Άρα είναι γραμμική

(ii) $tr(AB) = tr(BA)$

$$tr(AB) = tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

Προσθέτουμε μόνο τη διαγώνιο του AB

$$\left.\begin{aligned} = & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + \\ + & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} + \\ & - - - - - - - \\ + & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}. \end{aligned}\right\}$$ Είναι ένας αριθμός αλλά το γράψαμε σαν να είναι πίνακας, για ευκολία.

$$tr(BA) = tr\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

προσθέτουμε μόνο τη διαγώνιο του AB.

$$\begin{aligned} = & b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + \\ + & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{11} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + \\ & - - - - . \\ + & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{aligned}$$

Άρα καταφέραμε νδο

$$tr(AB) = tr(BA).$$

(iii) Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

Επομένως, έχουμε $A, B \in K^{n \times n}$. $B = P^{-1}AP$.

Αρκεί νδο : $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

Παρατηρούμε πως $P^{-1}AP$ έχουμε 2 πίνακες τους $P^{-1}A$ και P.

Άρα από ερώτημα (ii) προκύπτει :

$\longrightarrow$ $\longrightarrow$

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(P(P^{-1}A)) = tr(PP^{-1}A) = tr(A).$$

Άρα οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

(iv) <u>Ορισμός</u>: Έστω $\phi: V \to V$.
Ίχνος της γραμμικής απεικόνισης ϕ είναι το ίχνος $[\phi]_e^e$.

$$\boxed{tr\phi = tr([\phi]_e^e)}$$

Έχουμε $tr([\phi]_\gamma^\gamma) = tr([I]_e^\gamma [\phi]_e^e [I]_\gamma^e) = tr(P^{-1}[\phi]_e^e P) =$
$= tr([\phi]_e^e)$

Το ίχνος μιας απεικόνισης <u>δεν</u> εξαρτάται από τη βάση που ορίσαμε.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\phi: V \to V$.
Ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης ϕ είναι η ορίζουσα του $[\phi]_e^e$.

$$\det\phi = \det([\phi]_e^e)$$

$$\det([\phi]_e^e) = \det([I]_e^\gamma [\phi]_e^e [I]_\gamma^e) = \det[I]_e^\gamma \det[\phi]_e^e \det[I]_\gamma^e =$$
$= \det[\phi]_e^e$ γιατί το γινόμενο των οριζουσών των αντίστροφων πινάκων είναι 1.

$\det[I]_e^\gamma \cdot \det[I]_\gamma^e = 1$, αφού

$$([I]_e^\gamma)^{-1} = [I]_\gamma^e.$$

Ορισμός: Έστω $\phi: V \to V$ γραμμική απεικόνιση.
Η βαθμίδα της ϕ ορίζεται να είναι η διάσταση της εικόνας $\operatorname{rank}\phi = \dim \operatorname{Im}\phi = \operatorname{rank}[\phi]_e^e$

Παρατήρηση: A, B ισοδύναμοι $B = PAQ$ με P, Q αντιστρέψιμοι

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots 1 & 0 \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$M_1 \cdot \ldots \cdot M_q A N_1 N_2 \cdot \ldots \cdot N_p$ → γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

$$A \to M_q A \to M_{q-1} M_q A \ldots \to M_1 \ldots M_q A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αντί για στηλοπράξεις, θα πάρω τον ανάστροφο και ~~θα~~ θα κάνω γραμμοπράξεις.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ → ανάστροφος.

Στη συνέχεια μεταφέρω τους άσσους ώστε να έχω

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ με γραμμοπράξεις, όπου το r να είναι η βαθμίδα.